

27/04/17.

Πρόταση: Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Χ.Ε.Γ., $e_1, \dots, e_n$ ορθοκ. βάση του V κ' $v \in V$.
Τότε $V = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n$.

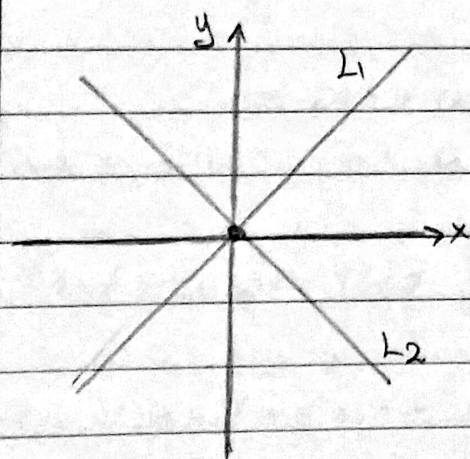
Απόδειξη: Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ με $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$
κ' έστω γιν i με το e_i έχουμε $\langle v, e_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j, e_i \rangle =$
 $= \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle e_j, e_i \rangle = \lambda_i$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow \lambda_i \langle v, e_i \rangle = 0_{\mathbb{R}} \stackrel{v \neq 0}{\Rightarrow} \lambda_i = 0_{\mathbb{R}}$$

Άρα $v_1, \dots, v_m$ γιν. αυ.

Ορισμός: Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Χ.Ε.Γ. και W_1, W_2 (γραμμικοί) υπόχωροι του V .
Οι W_1, W_2 λέγονται κόβεται μεταξύ τους αν:
 $\langle w_1, w_2 \rangle = 0_{\mathbb{R}} \quad \forall w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$

Στο $\mathbb{R}^2$ οι ευθείες $L_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$ και
 $L_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$ είναι κόβεται



Έστω $w_1 = (a, a) \in L_1, w_2 = (a, -a) \in L_2$

$$\text{Έχουμε } \langle w_1, w_2 \rangle = a \cdot a + a \cdot (-a) = a^2 - a^2 = 0_{\mathbb{R}}$$

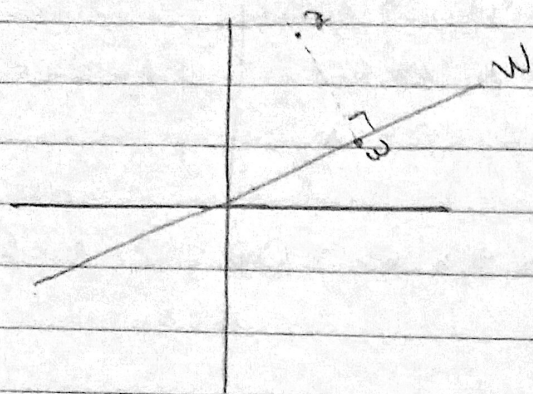
Στο $\mathbb{R}^3$ με βάσηes ε.γ. το επίπεδο xy

$$W_1 = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

κ' όξονες των z $W_2 = \{(a, 0, c) : c \in \mathbb{R}\}$ είναι κόβεται.

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Χ.Ε.Γ. κ' W_1, W_2 υπόχωροι κόβεται μεταξύ τους
Τότε $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$ (όλα τα αθροίσματα $W_1 + W_2$ είναι ε.γ.)

ορισμός: Έστω $v \in W, w \in W_2$. Τότε $v \in W_1, v \in W_2$. Άρα $\langle v, v \rangle = 0_{\mathbb{R}}$ αφού W_1, W_2 κέρκεται. Άρα αφού $\langle, \rangle$ ε.ε. από το θεμελιώδες αποτέλεσμα έπεται $v = 0_V$.



Πρόταση: Έστω $(V, \langle, \rangle)$ Ευκλείδειος χώρος με V πεπεσμένη διάστασης $\dim V = n > 0$ (γραμμικός) υπόχωρος του V . Έστω $z \in V$. Πέπει ότι το $W = \{x \in V : \langle z, x \rangle = 0\}$ είναι ένα επίπεδο του V πιο κοντά στο z .
 $\forall x \in W, \|z - w\| \leq \|z - x\|$ $\forall x \in W$.

Πρόταση: Τ.Α.Ε.1

- i.) Το w είναι επίπεδο του W πιο κοντά στο z .
- ii.) Το $z - w$ είναι κάθετο στο W , δηλ. $\langle z - w, x \rangle = 0 \quad \forall x \in W$.

Απόδειξη: i.) $\Rightarrow$ ii.) Ορίζουμε $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $F(t) = \|z - w + tx\|^2$

$$F(t) = \langle z - w + tx, z - w + tx \rangle = t^2 \langle x, x \rangle + t(\langle x, z - w \rangle + \langle z - w, x \rangle) + \langle z - w, z - w \rangle$$

Άρα F παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο.

Από υπόθεση ο τοπικό ελάχιστο της F . Άρα

$$F'(0) = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow 2tx, z - w \rangle = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow z - w \perp W$$

ii.) $\Rightarrow$ i.) Υποθέτουμε

$$\langle z - w, x \rangle = 0_{\mathbb{R}} \quad \forall x \in W$$

Έστω $x \in W$. Τότε

$$\begin{aligned} \|z - x\|^2 &= \|(z - w) + (w - x)\|^2 = \langle (z - w) + (w - x), (z - w) + (w - x) \rangle \\ &= \langle z - w, z - w \rangle + \langle w - x, z - w \rangle + \langle z - w, w - x \rangle + \langle w - x, w - x \rangle \end{aligned}$$

$$= \|z-w\|^2 + 0_R + 0_R + \|w-x\|^2 \geq \|z-w\|^2$$

Με ισοτιμία αν και μόνο αν $\|w-x\|^2 = 0_R \Leftrightarrow w=x$

ΑΠΟΡΙΣΜΟΣ: Υπολογισμός $w \in W$, δοθέντων W, z

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Χ.Ε.Γ, $W \leq V$ υπόχωρος $z \in V$

βήμα: 1: Υπολογίζουμε βάση $g = (g_1, \dots, g_p)$ του W .

βήμα: 2: Χρησιμοποιώντας Gram-Schmidt από την g κατασκευάζουμε ορθοκανονική βάση $e = (e_1, \dots, e_p)$ του W .

βήμα: 3: Θέτουμε $w = \langle z, e_1 \rangle e_1 + \langle z, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle z, e_p \rangle e_p$

Τότε το w είναι το μοναδικό σημείο του W που απέχει μικρότερη απόσταση από το z .

απόδειξη (1 σχη. 1) $z-w \perp W$

Από $w = \langle z, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle z, e_p \rangle e_p$ αρκεί να δ.ο. $\langle z-w, e_i \rangle = 0 \quad \forall i=1, 2, \dots, p$

Έχουμε $\langle z-w, e_i \rangle = \langle z, e_i \rangle - \langle w, e_i \rangle$

$$\begin{aligned} \langle z, e_i \rangle - \left\langle \sum_{t=1}^p \langle z, e_t \rangle e_t, e_i \right\rangle &= \langle z, e_i \rangle - \sum_{t=1}^p \langle z, e_t \rangle \langle e_t, e_i \rangle \\ &= \langle z, w \rangle - \langle z, w \rangle = 0_R \end{aligned}$$

Άρα από 1 σχη. 1 και προηγούμενη πρόταση W ένα σημείο του W πιο κοντά στο z .

(1 σχη. 2). w μοναδικό (Έπεται από την ισοτιμία $\|z-x\|^2 = \|z-w\|^2 + \|w-x\|^2$ της προηγούμενης από)

ορίσμος: (ορθογώνια προβολή σε υπόχωρο)

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Χ.Ε.Γ πεπερ διαστάσεως $W \neq \{0\}$ χρ υπόχωρος του V και $e_1, e_2, \dots, e_p$ ορθοκανονική βάση του W

Ορίζουμε την απεικόνιση $\Pi: V \rightarrow W$ με

$$\Pi(z) = \langle z, e_1 \rangle e_1 + \langle z, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle z, e_p \rangle e_p$$

ιδιότητες της π :

- i) π γραμμική
- ii) Αν $w \in W$ $\pi(w) = w$ (γιατί $w \in W \Rightarrow w = \sum_{i=1}^g \langle w, e_i \rangle e_i$)
- iii) Πάντα $\pi(z) \perp W$ (κοιτάμε)
- iv) Πάντα $\pi(z)$ το μοναδικό σημείο του W που έχει ελάχιστη απόσταση από το z .
Λόγω του iv) η π δεν εξαρτάται από την επιλογή της ορθοκανονικής βάσης e του W .

Π.Χ

Έστω $V = \mathbb{R}^3$ με συνθετες β.β. e_1, e_2 και $W = \langle (1, 0, 0), (1, 1, 1) \rangle$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Βρείτε την απεικόνιση ορθογώνιας προβολής

$$\pi: V \rightarrow W$$

→ βήμα 1: (Gram-Schmidt) β.β. $g = (g_1 = (1, 0, 0), g_2 = (1, 1, 1))$ του W . Θέτουμε $h_1 = g_1 = (1, 0, 0)$

$$h_2 = g_2 - \frac{\langle g_2, h_1 \rangle}{\langle h_1, h_1 \rangle} h_1 = (1, 1, 1) - \frac{1}{1} (1, 0, 0) = (0, 1, 1)$$

$$\text{Θέτουμε } e_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|} = \frac{h_1}{1} = (1, 0, 0)$$

$$e_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|} = \frac{h_2}{\sqrt{2}} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}). \text{ Τότε } e = (e_1, e_2)$$

ορθοκανονική βάση του W

βήμα 2: Έστω $z = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Τότε $\pi(z) = \langle z, e_1 \rangle e_1 + \langle z, e_2 \rangle e_2$
$$= a e_1 + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = e_2 = (a, 0, 0) + (0, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2})$$
$$= (a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2})$$

Π.Χ

για $z = (3, 4, 5)$ το σημείο του W πιο κοντά W πιο κοντά στο z είναι το $\pi(z) = \pi(3, 4, 5) = (3, \frac{4+5}{2}, \frac{4+5}{2}) = (3, \frac{9}{2}, \frac{9}{2})$

Άσκηση 6:

(#4)

Έστω $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = 5a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + a_2b_2$$

α) Δο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ εσωτ. γιν. στο $\mathbb{R}^2$

β) Βρείτε τα γινόμενα των $(1,0)$ και $(0,1)$ ως προς το $\langle \cdot, \cdot \rangle$

⇒ α) Συμμετρική: $\langle (b_1, b_2), (a_1, a_2) \rangle = 5b_1a_1 - 2b_1a_2 - 2b_2a_1 + b_2a_2$
 $= \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle$

Διαγραμμική: $\langle (a_1, a_2) + (a'_1, a'_2), (b_1, b_2) \rangle = \langle (a_1 + a'_1, a_2 + a'_2), (b_1, b_2) \rangle$
 $5(a_1 + a'_1)b_1 - 2(a_1 + a'_1)b_2 - 2(a_2 + a'_2)b_1 + (a_2 + a'_2)b_2 =$
 $= (5a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + a_2b_2) + (5a'_1b_1 - 2a'_1b_2 - 2a'_2b_1 + a'_2b_2) =$
 $= \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle + \langle (a'_1, a'_2), (b_1, b_2) \rangle$

Επίσης για $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle \lambda(a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = \langle (\lambda a_1, \lambda a_2), (b_1, b_2) \rangle = 5(\lambda a_1)b_1 - 2(\lambda a_1)b_2 - 2(\lambda a_2)b_1 + (\lambda a_2)b_2 = \lambda(5a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + a_2b_2) = \lambda \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle$$

Άρα $\langle \cdot, \cdot \rangle$ γραμμική ως προς την πρώτη θέση. Άρα είναι συμμετρική, το ίδιο ισχύει και για την δεύτερη θέση. Άρα $\langle \cdot, \cdot \rangle$ δοξο.

ΘΕΤΙΚΑ ΟΡΙΣΜΕΥΟ: Έστω $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ μη μηδενικό

$$\langle (a_1, a_2), (a_1, a_2) \rangle = 5a_1^2 - 4a_1a_2 + a_2^2 = a_1^2 + (2a_1)^2 - 2(2a_1)a_2 + a_2^2 = a_1^2 + (2a_1 - a_2)^2$$

το οποίο είναι πάντα μη αρνητικό

αν αθροισμα τετραγώνων είναι μηδέν αν κ' μόνο αν

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ 2a_1 - a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = a_2 = 0 \text{ που δεν ισχύει. Άρα } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ εσωτ. γιν.}$$

$$\|(1,0)\| = \sqrt{\langle (1,0), (1,0) \rangle} = \sqrt{5}$$

$$\|(0,1)\| = \sqrt{\langle (0,1), (0,1) \rangle} = 1$$

Είναι τα $(1,0), (0,1)$ κάθετα ως προς το $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\langle (1,0), (0,1) \rangle = 5 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = -2 \neq 0 \text{ δεν είναι κάθετα ως προς } \langle \cdot, \cdot \rangle.$$

Θα βρούμε ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ ως προς το $\langle, \rangle$ με αλγόριθμο Gram-Schmidt

Θέτουμε $g_1 = (1, 0)$, $g_2 = (1, 1)$ βάση του $\mathbb{R}^2$

Θέτουμε $h_1 = g_1$, $h_2 = g_2 - \frac{\langle g_2, h_1 \rangle}{\langle h_1, h_1 \rangle} h_1 = (1, 1) - \frac{1}{2} (1, 0) = (\frac{1}{2}, 1)$

$$e_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|} = \frac{h_1}{\sqrt{1}} = (1, 0) \quad , \quad e_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|} = \frac{(\frac{1}{2}, 1)}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 1}} = \frac{(\frac{1}{2}, 1)}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1}} = \frac{(\frac{1}{2}, 1)}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{(\frac{1}{2}, 1)}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$$

Άσκηση: 7 (#4) Έστω $n \geq 1$ $f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}$ διαδοχικά ανά δυο. ορίζουμε $\langle, \rangle : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1) + \dots + f(n)g(n)$$

Δ.ο $\langle, \rangle$ είναι γν. στο $\mathbb{R}_n[x]$

Η συμμετρικότητα είναι άμεση λόγω της μεταθετικότητας διαγραμμικών.

$$\begin{aligned} \langle f_1 + f_2, g \rangle &= (f_1 + f_2)(0)g(0) + (f_1 + f_2)(1)g(1) + \dots + (f_1 + f_2)(n)g(n) \\ &= (f_1(0) + f_2(0))g(0) + \dots + (f_1(n) + f_2(n))g(n) \\ &= \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle \end{aligned}$$

Ομοίως δείχνουμε για $\lambda \in \mathbb{R}$ $\langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle$

Άρα λόγω συμμετρικότητας $\langle, \rangle$ διαγραμμικό

ΘΕΤΙΚΟ ΟΡΙΣ

Έστω $f(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ θ.δ.ο $\langle f(x), f(x) \rangle \geq 0$

Εάν $\langle f(x), f(x) \rangle = 0$ $\Rightarrow f(x) = 0_{\mathbb{R}_n[x]}$ (δηλ $f(x) = \text{μονοδ. πολ. } 0$)
 $\langle f(x), f(x) \rangle = (f(0))^2 + (f(1))^2 + \dots + (f(n))^2$ που είναι άθροισμα τετραγώνων

Έστω $f(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ με $\langle f(x), f(x) \rangle = 0$

$$\Rightarrow (f(0))^2 + (f(1))^2 + \dots + (f(n))^2 = 0$$

$$\Rightarrow f(0) = f(1) = \dots = f(n) = 0 \quad (*)$$

ΥΠΕΝΟΜΩΣΗ Αν F σώμα και $g(x) \in F[x]$ μη μηδενικό πολυνομο βαθμού m τότε το g έχει το πολύ m διακεκριμένες ρίζες στο F .
Αρα στην περίπτωση μας, αν $f(x) \neq \text{μονοδ. πολωνύμου}$ (*)
 $\Rightarrow f(x)$ έχει $\geq n+1$ διακεκριμένες ρίζες στο $\mathbb{R}$.
Αλλά η υπενόμωση, αφού $\deg f(x) \leq n$ μας δίνει ότι το $f(x)$ $\leq n$ διακεκ. ρίζες στο $\mathbb{R}$ οπότε οπ. $\square$.